

Alle Rechte beim Urheber.
Abdruck nur gegen Belegexemplar.

Existentialismus mit Axiomen

Er zählt zu den größten Mathematikern aller Zeiten. David Hilbert war so scharf- und weitsichtig, dass seine Vision der Mathematik Generationen von Mathematikern den Weg wies. Die unwiderstehliche Kombination aus Beharrlichkeit, Eleganz und Klarheit machte aus ihm einen der einflussreichsten Denker, der der kulturellen Endzeitstimmung trotzte und seiner Zunft neues Selbstvertrauen einflößte. Sein Credo: „Wir müssen wissen. Wir werden wissen.“ Unbeugsam und unbequem folgte er seiner Vision, auch als diese etwas eintrübte und die Kultur durch einen tiefbraunen Anstrich sich völlig verfinsterte.

Der am 23. Januar 1862 in Königsberg geborene Mathematiker verachtete den Krieg. Krieg und Mathematik waren für Hilbert unvereinbar. Die Mathematik kenne weder Rassen noch Nationen, sie sei international. Schon im Ersten Weltkrieg hatte Hilbert dem Kaiser seine Unterstützung versagt, indem er sich weigerte, ein Dokument zu unterzeichnen, das die Kriegsschuld des Deutschen Reiches bestritt. Zudem zögerte er keine Sekunde, inmitten der Unruhen einen Nachruf zu veröffentlichen auf einen Kollegen aus dem verfeindeten Frankreich. Das Ende des Zweiten Weltkrieges erlebte Hilbert nicht mehr. Er starb am 14. Februar 1943 in Göttingen, das unter ihm zum Mekka der Mathematik geworden war und das die Nationalsozialisten durch ihre rassistische Vertreibung völlig zerschlagen hatten, lange bevor der erste Schuss fiel.

Unter der Mathematik verstand Hilbert ein begriffliches System von innerer Notwendigkeit, das, sich selbst begründend, in sich ruht. Die Mathematik genügt sich selbst, sie ist voraussetzungslos. Ihre Existenz beziehen die Gegenstände der Mathematik daraus, dass sie sich widerspruchsfrei in das begriffliche System einfügen. Fundierende, lebensweltliche Anschauungen werden dadurch entbehrlich: man muss einen Winkel nicht gesehen, Sandkörner nicht gezählt haben, um zu Lehrsätzen der Geometrie oder Arithmetik vorzudringen. In der Mathematik existiert alles (und nur das), was sich innerhalb des Systems widerspruchsfrei denken lässt. Damit der inneren Notwendigkeit Genüge getan ist, müssen mathematische Theorien lückenlos und exakt aufgebaut sein. Lückenlos und exakt ist eine Theorie genau dann, wenn all ihre Lehrsätze sich herleiten lassen aus fundamentalen Grundsätzen, den Axiomen.

Die axiomatische Methode kürte Hilbert zum Chefarchitekten und Bauherrn der Mathematik im 20. Jahrhundert, weil es ihm gelang, große Teile der Mathematik zu axiomatisieren und die Methode auf nahezu sämtliche Disziplinen zu übertragen. Der tanzbegeisterte Mathematiker mit rötlichem Kinnbart und strahlend blauen Augen stellte die Invariantentheorie, die Geometrie und Mechanik auf neue Grundlagen, vereinheitlichte die Zahlentheorie, baute die Analysis aus und bewies grundlegende Sätze der Algebra. Seine nahezu die gesamte Mathematik durchdringende Vielseitigkeit prädestinierte Hilbert wie kaum einen anderen, auf dem Internationalen Mathematiker-Kongress im August 1900 einen Übersichtsvortrag zu halten. Und der hatte es in sich.

„Zwei wichtige Eigenschaften zeichnen einen großartigen Mathematiker aus: Fragen stellen und Fragen beantworten“, sagt Marcus du Sautoy, Mathematikprofessor an der Universität Oxford. Auf dem Kongress in Paris stellte Hilbert 23 Fragen, deren Beantwortung er als besonders dringlich oder als unmittelbar bevorstehend ansah. Diese Fragen, darunter das Kontinuumproblem, Fermats letzter Satz, die Riemannsche Vermutung und die Axiomatisierung der Arithmetik, notierte der internationale Mathematikernachwuchs eifrig in seine Notizbücher, denn in der Fachöffentlichkeit würde sich jeder unweigerlich einen Namen machen, dem die Lösung eines der von Hilbert aufgelisteten Probleme gelang.

Hilberts Pariser Vortrag steckte nicht nur künftige Forschungsfelder ab, er zeichnete auch vor, wie diese zu beackern sind: mithilfe der Axiomatik. Erst eine axiomatisierte Mathematik schaffe eine letzte und unumstößliche Klarheit. Wie mächtig die axiomatische Methode ist, hatte Hilbert in der Geometrie vorgeführt. Aus ihr verbannte er jegliche Anschauung, zu der Euklid regelmäßig Zuflucht genommen hatte, um die Gültigkeit seiner Axiome zu begründen. Axiome waren nicht länger unsichtbare Grundannahmen, vielmehr verkörperten sie den formalen Untergrund, der die gesamte Geometrie insofern trägt, als sich all ihre Lehrsätze aus den Axiomen herleiten lassen.

Entscheidend ist für Hilbert allein die formale Herleitung, nicht die Vorstellung, die man sich zu einem Axiom macht. Statt von Punkten, Geraden und Ebenen, könne man in der Geometrie ohne weiteres auch von Sockeln, Pilastern und Firsten sprechen oder gleich außersprachliche Symbole verwenden. Damit entfällt eine Definition der Grundbegriffe. Wann ein Punkt auf einer Geraden liegt oder zwei Dreiecke kongruent sind, ergibt sich einfach aus den Axiomen.

Hilberts Axiomatik machte aus der Geometrie einen Kalkül, dessen Eigenschaften durch die Axiome bestimmt werden. Ändert man ein Axiom, ändert sich die Geometrie. Dadurch fiel eine Unzahl nicht-euklidischer Geometrien in den Schoß der Mathematiker, die sich bis dato nur an das Parallelenaxiom gewagt hatten und zu ihrem Erstaunen feststellen mussten, dass Geometrien möglich sind, in denen Geraden sich in mehr als einem Punkt schneiden. Losgelöst von der Anschauung, war nun jedes Axiom der Manipulation freigegeben.

So erstrebenswert die Axiomatisierung gewesen sein mochte, so blieb doch der Beweis das Kerngeschäft eines Mathematikers. Schließlich interessierten auch Hilbert am meisten die Lehrsätze, die aus den Axiomen folgen. Doch begnügte sich der Göttinger Mathematiker nicht mit althergebrachten Beweisen. Seinem Denken entsprang ein Beweistyp, der sich erneut als wahrhaftes Füllhorn für die Mathematik erwies: der Existenzbeweis. Die Existenz eines mathematischen Gegenstandes hielt Hilbert für erklärt, wenn gegenteilige Annahmen sich in Widersprüchen verfangen. Die Mathematik wurde dadurch noch abstrakter - und noch reicher.

In Hilberts Mathematik gibt es dank des Existenzbeweises Gegenstände, die niemand jemals konstruiert hat, ja die noch nicht einmal konstruierbar sein müssen. Zusammen mit den Axiomen verlieh der Existenzbeweis Hilberts Vision ihre unverwechselbare Gestalt. Sie äußert sich in einem Denken, das der passionierte Spaziergänger und Radfahrer „axiomatisch-existentialen Schließen“ nannte. Diesem lag die Überzeugung zugrunde, dass alle Gegenstände einer Theorie durch Zahlen derart dargestellt werden können, dass die Beziehungen der Gegenstände untereinander in Gleichungen und Ungleichungen ihren Ausdruck finden, in denen die Axiome der Theorie in arithmetische Identitäten übergehen oder in Bedingungen münden, die anhand arithmetischer Existenzsätze erfüllt werden können.

Die Arithmetisierung der Mathematik trieb Hilbert mit derselben Energie voran wie deren Axiomatisierung. Schließlich begünstigte sie den soliden Aufbau mathematischer Gebäude, der an Klarheit nicht mehr zu überbieten ist, denn was könnte klarer sein als die eingeschliffenen Lehrsätze über die Grundrechenarten? Die Arithmetik nimmt nach Hilbert eine tragende Position ein. Sie liefert die Stahlgitter, die den Beton der anderen Disziplinen spannen. So zeigte Hilbert, dass die Geometrien - euklidische wie nicht-euklidische - widerspruchsfrei sind, wenn es die Arithmetik ist: Ein

Widerspruch in der Geometrie erzeugt unweigerlich einen Widerspruch in der Arithmetik.

Mit dem Beweis der Widerspruchsfreiheit der Arithmetik hätte Hilbert Richtfest feiern können. Doch kamen unter den Mathematikern bald schon Zweifel auf, welche Lehrsätze berechtigterweise den Korpus der Arithmetik ausmachen, sprich welche Sätze es denn sind, von denen gezeigt werden soll, dass sie in keinen Widerspruch führen. Vor allem die Existenzsätze hatten sie auf dem Kieker. Wer behaupte, dass im Gebäude der Mathematik eine Etage existiere, müsse auch sagen, wie man dorthin gelange; ansonsten spukten unhaltbare Annahmen durch mathematische Luftschlösser. Mit anderen Worten, es wurde verlangt, dass Gegenstände, deren Existenz man annahm, bitteschön konstruiert werden sollten.

Die Grundlagenkrise der Mathematik, ausgelöst von mengentheoretischen Paradoxien, hatte manche Mathematiker nervös gemacht. Um sich die Paradoxien vom Leib zu halten, zogen sie sich zurück hinter Schutzwälle, die sie konstruieren konnten. Von nicht konstruierbaren Gegenständen wie dem Kontinuum hielten sie sich fern. Dadurch allerdings würden weite Teile der Analysis verfallen, die Funktionentheorie bräche ganz weg. Für Hilbert unzumutbar. Er antwortete mit einem schwergewichtigen Programm, das die gesamte Mathematik, so wie er sie sah, rehabilitieren sollte.

Dieses Programm erhielt den Titel Beweistheorie. Die Mathematik sollte sich ihre Beweise vorknüpfen und mit ihren eigenen, endlichen Mitteln nachweisen, dass in ihrem mühevoll errichteten Gebäude kein Grund zur Unruhe besteht. Die Idee hinter der Beweistheorie ist, dass jeder Beweis in der Mathematik, auch der Existenzbeweis, aus endlich vielen Formeln besteht, die zu Argumentationsketten verknüpft sind. Geht man die Beweise rückwärts durch und zeigt an jeder Stelle, dass sich an ihr kein Widerspruch herleiten lässt, wäre konstruktiv bewiesen, dass die Theorie widerspruchsfrei ist. Das Programm zielte letztlich darauf, die Sätze der Arithmetik in logische Aussagen zu überführen und so auf mögliche Widersprüche zu untersuchen, die sich allein aus ihrer Form ergeben.

Doch Kurt Gödel bewies 1930, dass genau das nicht geht. Formale Systeme, die so mächtig sind wie die Arithmetik, können aus sich heraus den Widerspruchsfreiheitsbeweis der Arithmetik nicht leisten. Positiv gewendet: Jeder Widerspruchsfreiheitsbeweis der Arithmetik muss bei Theorien Kredit borgen, deren Widerspruchsfreiheit entweder unbewiesen

ist oder von wiederum mächtigeren Theorien bewiesen werden muss.

Hilberts Beweistheorie stellte sich als zu ambitioniert heraus; just im Jahre seiner Emeritierung fiel ein leichter Schatten auf die Vision der weltweit anerkannten Koryphäe. Die Mathematik kann sich selbst nicht tragen, die Beweiskraft ihrer Beweise selbst nicht beweisen. Ihre Widerspruchsfreiheit lässt sich mathematisch nicht aufzeigen. Denn es gibt nach Gödel kein widerspruchsfreies Axiomensystem für die gesamte Mathematik, das jede mathematische Aussage zu beweisen oder zu widerlegen gestattet. Hier waren der axiomatischen Methode Grenzen gezogen.

Hilbert musste sich mit der Hypothek möglicher Widersprüche in der Mathematik arrangieren. Sein Pochen auf Strenge und Genauigkeit, sein unerbittliches Streben nach einfacheren und eleganteren Beweisen bereits bewiesener Lehrsätze, sein Bemühen um eine Vereinheitlichung der Mathematik auf methodischer Grundlage und seine Suche nach den ersten und abstraktesten Anfangsgründen der Mathematik waren jedoch der beste Garant dafür, dass tatsächlich keine Widersprüche auftraten. Hilberts Vision ist nicht Wirklichkeit geworden, aber fruchtbar geblieben. Nicht zuletzt dank der axiomatischen Methode. „Die ist heute Standard in der Mathematik“, bekräftigt Albrecht Beutelspacher, Mathematikprofessor an der Universität Gießen.